

## Laboratórna úloha č. 101

### Vibrometria

- 
- Úlohy:**
- A Identifikujte frekvenciu základného módu nosníka vo vibračnom spektre experimentálneho zariadenia
  - B Určte závislosť rezonančnej frekvencie na pridanej záťaži na nosníku
  - C Pozorujte vplyv väzby medzi nosníkmi na frekvencie ich oscilácií
- 

#### Teoretický úvod

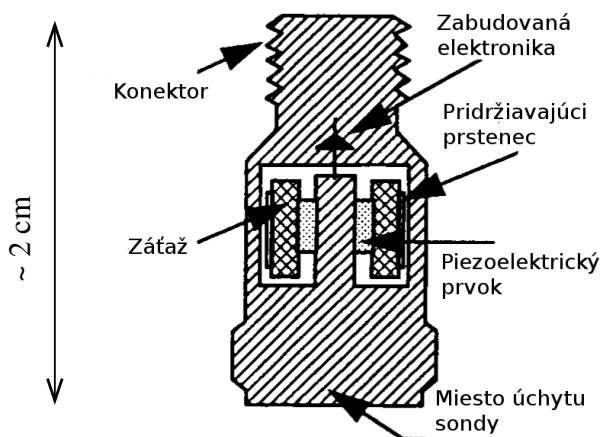
Rôzne telesá, stroje či dokonca celé budovy, dokážu vykonávať jemný, ale veľmi rýchly pohyb, ktorý hovorovo nazývame chvenie. Z pohľadu fyziky chvenie zodpovedá mechanickým vibráciám s frekvenciou typicky od niekoľkých hertzov až po kilohertze a s výchylkami od rovnovážneho tvaru telesa zhruba od desiatín mikrometra až po desatiny milimetra. Tieto vibrácie sú dôsledkom rôznych vonkajších silových pôsobení, napríklad zvuku, vetra, náhodných úderov a podobne. Zvlášť dôležité je štúdium vibrácií v točivých strojoch, ako sú napríklad motory, prevodovky, dynamá a alternátory, kde silové pôsobenie generujúce vibrácie je samotný točivý pohyb stroja. Vďaka pružnosti sa toto mechanické silové pôsobenie šíri celým telesom a vybudzuje v ňom vibrácie s viacerými frekvenciami, zodpovedajúcimi deformáciám jeho častí.

Vibrácia telesa s presne určenou frekvenciou sa nazýva jeho *mód*. Múd s najnižšou frekvenciou sa nazýva *základný mód*. Výchylky telesa zodpovedajúce vibrácii vybranému módu sú nenulové v celom telese, aj keď amplitúda týchto vibrácií môže byť v niektorých oblastiach výrazne vyššia. Na druhej strane, všetky módy okrem základného majú takzvané *uzlové plochy*, kde je výchylka vibrácií v každom okamžiku času nulová. Veľkej obľube sa teší zviditeľňovanie uzlových čiar pri vibráciach kovových platní pieskom, ktorý vytvára takzvané Chladniho obrazce.

V dôsledku mechanických porúch a zmien sa vibračné módy telies menia. Pri nezmenených vonkajších silových pôsobeniach možno pozorovať zmenu amplitúd niektorých módov, respektíve *posun ich frekvencií*. Vibračná diagnostika je metodika založená na pravidelnej kontrole charakteru vibrácií zariadenia a interpretácie prípadných nájdených zmien s cieľom identifikovať možné zlyhanie zariadenia pred tým, ako k nemu skutočne príde. Príkladom môže byť porušený zub orubeného kola v mechanických prevodoch, vedúci k zvýšeniu amplitúdy vibrácií, alebo vyvíjajúci sa lom vo vibrujúcom nosníku vedúci k posunu frekvencií jeho módov.

V prípade netočivých strojov (alebo iných zariadení, ktorých funkčnosť priamo súvisí s pohybom) je dôležité používať štandardizované silové pôsobenia vyvolávajúce vibrácie, čím

sa zaručí reprodukovateľnosť a porovnateľnosť meraní. Impulzné kladivká (impact hammer) sa využívajú pre jednorazové vybudenie širokého spektra vibrácií a mixéry (shaker) na kontinuálne budenie širokého spektra vibrácií. Možno je tiež budenie vibrácií pomocou harmonického zvukového generátora. Zmenou frekvencie generovaného tónu možno postupne získať vibračnú charakteristiku študovaného zariadenia, aj keď tento postup je zdĺhavejší ako predchádzajúce dva.

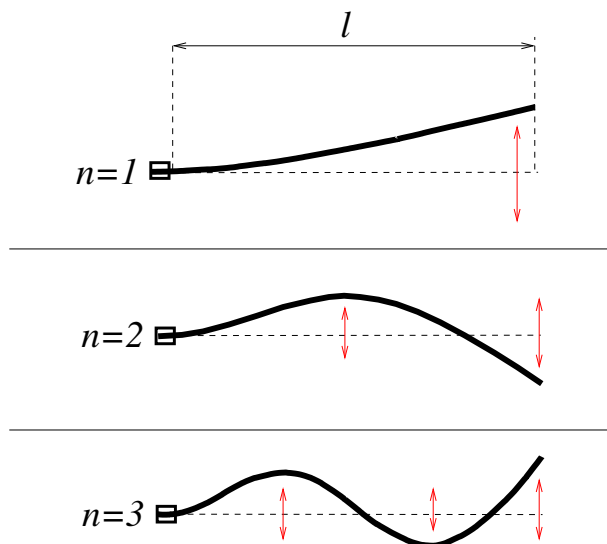


Obr. 1: Prierez piezoelektrickým sensorom vibrácií. Pri uchytení na vibrujúce teleso pohyb záťaže zaostáva za vibráciami zvyšku senzora, čo vedie k deformácii piezoelektrického prvku a následnej indukcii elektrického náboja na tomto prvku. Veľkosť indukovaného náboja je úmerná okamžitému zrýchleniu senzora.

V súčasnosti existuje viacero metód ako možno kvantitatívne merať jemné vibrácie telies v širokom intervale frekvencií. V priemysle najrozšírenejšie je meranie pomocou piezoelektrických snímačov, ktoré je využívané aj v tomto meraní. Základom takéhoto snímača je piezoelektrický prvok - kryštál oxidu kremičitého (kremeň), ktorý v dôsledku mechanickej deformácie indukuje na svojich protíľahlých stenách opačný elektrický náboj, a teda nenulové elektrické napätie. V senzore, ktorého prierez je zobrazený na obr. 1, je deformácia kryštáliku realizovaná uchytením jeho vnútornej steny prostredníctvom púzdra na študované teleso, pričom na druhú stenu kryštáliku je uchytená malá zotrvačná hmotnosť - záťaž. Vibrácie telesa, a teda zrýchlený pohyb púzdra senzora na jednej strane, a pôsobenie zotrvačných síl na zotrvačnú hmotnosť na strane druhej kryštálik deformujú, čo vedie k indukovaniu náboja a elektrického napätia úmerného okamžitému zrýchleniu senzora. Napätový signál je cez konektor posielať na meracie zariadenie, napríklad osciloskop. Piezoelektrický sensor meria okamžité zrýchlenie, a preto sa nazýva aj akcelerometer. Okrem vibračnej analýzy má použitie aj v robotike alebo mobilných zariadeniach ako senzor pohybu.

V súčasnosti sa rýchlo rozvíja aj metóda merania vibrácií pomocou Dopplerovho posunu laserového lúča, tzv. laserova skenovacia vibrometria. Jej princíp je založený na Dopplerovom posune frekvencie svetla pri jeho odraze od pohybujúceho sa povrchu. Jej výhodou oproti piezoelektrickému sensoru je, že je to bezkontaktná metóda, a teda neovplyvňuje

vibrácie samotného zariadenia a že presmerovaním lúča je možné relatívne rýchlo zosnímať vibrácie na viacerých miestach telesa (skenovanie). Tieto zariadenia sú však podstatne drahšie a zatiaľ nedosahujú citlivosť piezoelektrických snímačov.



Obr. 2: Kvalitatívne zobrazenie kmitov nosníka s pevným ľavým okrajom pre tri módy s najnižšími frekvenciami. Červené vertikálne šípky naznačujú smer kmitania.

**Módy nosníka a harmonické kmity** Matematickým opisom vibrácií telies sa zaoberá mechanika v rámci teórie pružnosti. Ide o pomerne komplikovanú teóriu, a preto si tu uvedieme len jeden jej špeciálny výsledok, ktorý bude užitočný pre toto meranie. Ohybný nosník predstavuje pružnú dosku uchytenú na jednej strane, ktorá dokáže kmitať (viď Obr. 2). Možno ukázať, že frekvencie módov ohybného nosníka sú

$$f_n = \frac{\pi}{2l^2} \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho}} \beta_n^2, \quad (1)$$

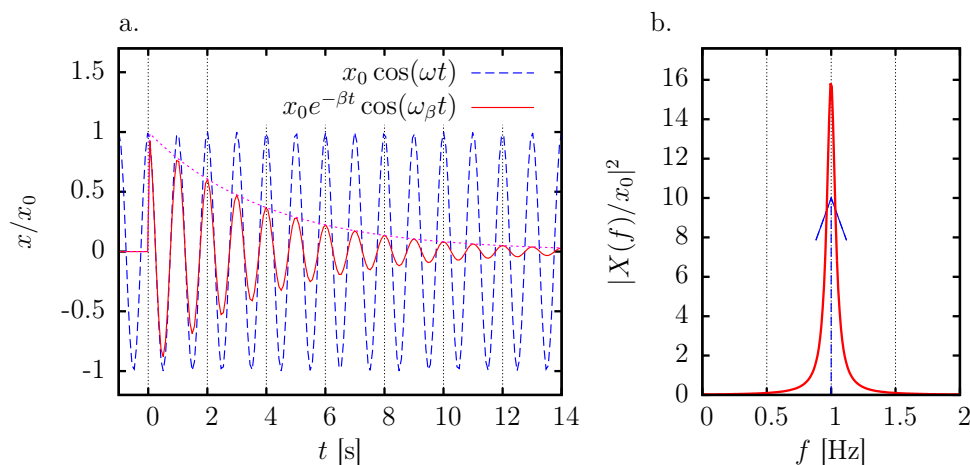
kde  $l$  je dĺžka nosníka,  $h$  je jeho hrúbka v ohýbanom smere,  $E$  je Youngov modul pružnosti,  $\rho$  hustota a  $\beta_n$  sú bezrozmerné čísla, charakterizujúce módy  $n = 1, 2, \dots$ , napr.  $\beta_1 = 0,597$ ,  $\beta_2 = 1,494$ , a pre veľké  $n$  približne platí  $\beta_n \approx n - 1/2$ .

Pre oceľ je  $E \approx 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ ,  $\rho \approx 7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , čo pre plech v tvare pásika dĺžky  $l = 12 \text{ cm}$  a hrúbky  $h = 1,5 \text{ mm}$  vedie na frekvencie prvých dvoch módov zhruba  $f_1 \approx 87 \text{ Hz}$  a  $f_2 \approx 540 \text{ Hz}$ . Akákoľvek zmena nosníka, napríklad jeho dĺžky či pridanie malej záťaže na jeho konci, vedie ku zmene týchto frekvencií.

Ak je v telese vybudený len jeden mód, bude sa výchylka telesa v ľubovoľnom jeho mieste meniť v čase vo forme funkcie kosínus s frekvenciou vybudeného módu,

$$x(t) = x_0 \cos(2\pi ft), \quad (2)$$

kde  $x_0$  je jej maximálna výchylka z rovnovážnej polohy v nami vybranom mieste telesa. Na obrázku 3a je zobrazený príklad takýchto kmitov modrou prerušovanou čiarou. Dve nasledovné maximá sú od seba vzdialené o periódu  $T = 1/f$ ; v tomto prípade  $T = 1 \text{ s}$ .



Obr. 3: (a) Časový priebeh výchyliek harmonických a tlmených kmitov. Na rozdiel od netlmených kmitov daných funkciou kosínus, tlmené kmity majú len konečné trvanie - v tomto prípade so začiatkom v čase  $t = 0$  a následne s exponenciálne rýchlo klesajúcou amplitúdou. (b) Frekvenčné spektrá signálu netlmených a tlmených kmitov.

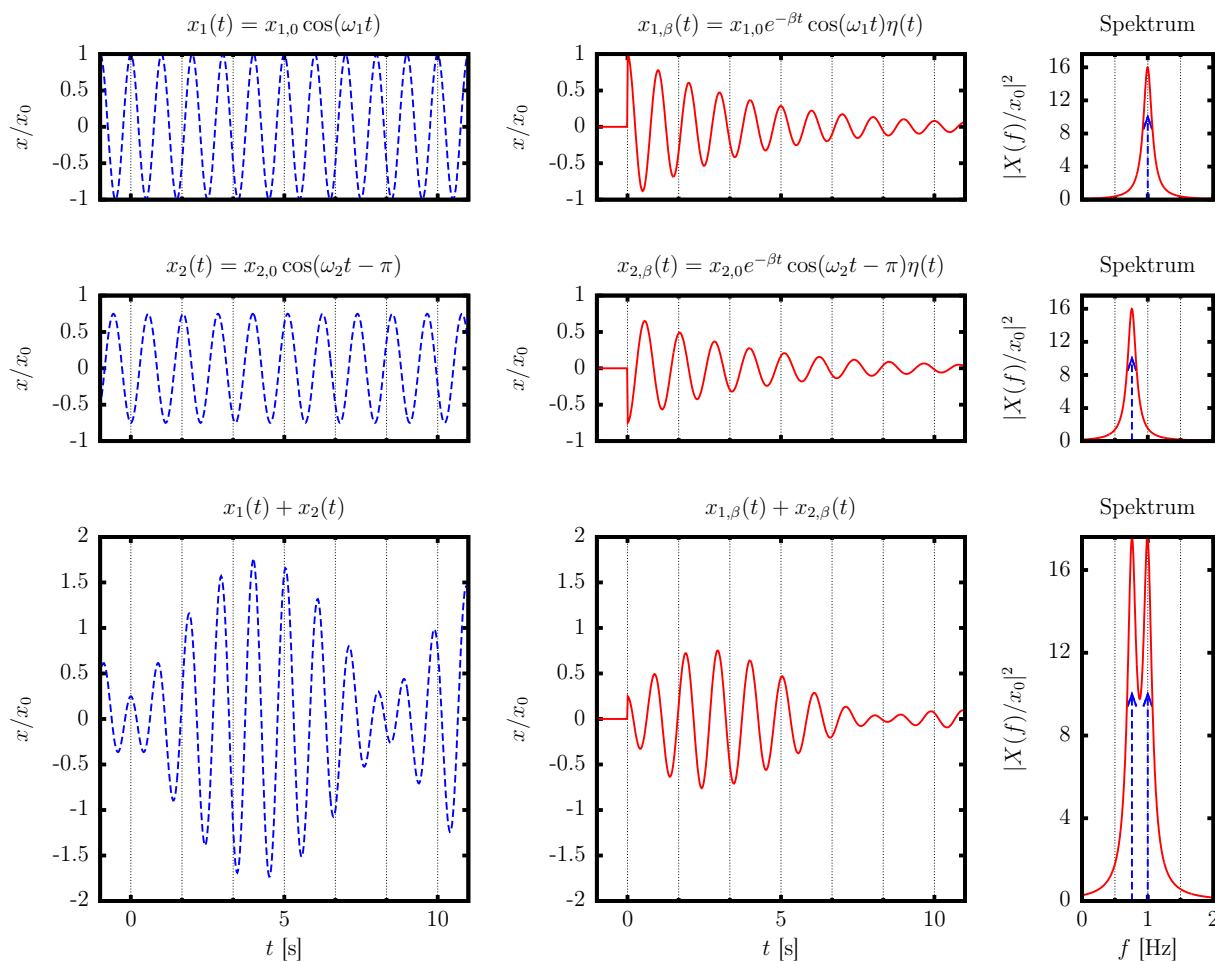
**Tlmený harmonický oscilátor** Amplitúda výchyliek reálnych kmitov s postupom času klesá - kmitanie je tlmené v dôsledku pôsobenia trecích síl a iných energetických strát

$$x(t) = x_0 e^{-\beta t} \cos(2\pi f t), \quad (3)$$

kde  $\beta$  je koeficient útlmu kmitov. Tlmené kmity výchylky sú zobrazené červenou čiarou na obrázku 3a. Parameter  $\beta$  má rozmer  $[\beta] = \text{s}^{-1}$  a nazývame ho koeficient útlmu. Jeho hodnota udáva ako rýchlo klesá amplitúda kmitov; napríklad amplitúda poklesne na jednu polovicu svojej veľkosti v počiatočnom momente za čas  $\tau_{1/2} = \ln 2 / \beta \approx 0,693 / \beta$ . V prípade kmitov na obrázku je zvolené  $\beta = 0,25 \text{ s}^{-1}$ , a preto amplitúda poklesla na polovicu v čase  $\tau_{1/2} \approx 2,7 \text{ s}$ .

**Vibračné spektrum** Grafom alebo matematickým predpisom danú výchylku ako funkciu času nazývame aj signálom. Charakterizácia signálu v tejto forme ale nie je veľmi praktická. Namiesto nej sa používa takzvané vibračné spektrum signálu. Pre netlmené kmity s frekvenciou  $f$  predstavuje vibračné spektrum jedinú vertikálnu čiaru zobrazenú modrou šípkou na obrázku 3b pri tejto frekvencii. Na druhej strane, tlmené kmity majú konečnú dĺžku trvania, a preto, ako sa ukazuje v rámci časti matematiky nazývanej Fourierova analýza, je potrebné takýto signál vyskladať zo signálov s viacerými frekvenciami, sústredenými v blízkosti hlavnej frekvencie  $f$  netlmeného signálu. Vibračné spektrum tlmených kmitov je zobrazené červenou krivkou na obrázku 3b. Amplitúda tejto krivky udáva, s akou mierou je v celkovom signále zastúpená tá-ktorá frekvencia. S najväčšou amplitúdou je v tomto prípade zastúpená frekvencia netlmených kmitov  $f = 1 \text{ Hz}$ , a postupne táto amplitúda klesá, pričom pre frekvencie väčšie ako  $1,5 \text{ Hz}$  a menšie ako  $0,5 \text{ Hz}$  je prakticky nulová. Vo všeobecnosti platí, že rozsah frekvencií, pre ktoré je amplitúda spektra nenulová, je zhruba daný dvojnásobkom koeficientu tlmenia  $\beta$ , v tomto prípade

$$2\beta \approx 0,5\text{s}^{-1} = 0,5\text{Hz}.$$



Obr. 4: Skladanie netlmených (vľavo) a tlmených (v strede) kmitov. Vpravo sú vibračné spektrá zodpovedajúce týmto signálom.

**Skladanie kmitov** Každé teleso má vždy viacero módov, a preto výchylka telesa, ktorú modelujeme ako výchylku harmonických oscilátorov, bude vo všeobecnosti predstavovať zložené kmitanie s viacerými frekvenciami,

$$x(t) = x_1 \cos(2\pi f_1 t - \phi_1) + x_2 \cos(2\pi f_2 t - \phi_2) + \dots \quad (4)$$

Jednotlivé funkcie kosínus môžu byť vzájomne posunuté v čase prostredníctvom fázových faktorov  $\phi_1, \phi_2$ . Skladanie takýchto dvoch netlmených signálov je ilustrované na obr.4 vľavo. Všimnime si, že zložením dvoch signálov s blízkymi frekvenciami dostaneme signál, ktorý už nie je v čase stále rovnaký, ale vykazuje takzvané rázy - pravidelný pokles a nárast amplitúdy.

V prípade tlmených kmitov modelujeme módy telies ako zložené kmitanie viacerých tlmených oscilátorov, s rôznymi koeficientami útlmu, t.j.

$$x(t) = x_1 e^{-\beta_1 t} \cos(2\pi f_1 t - \phi_1) + x_2 e^{-\beta_2 t} \cos(2\pi f_2 t - \phi_2) + \dots \quad (5)$$

Vhodnou voľbou parametrov  $x_1, x_2, \beta_1, \beta_2, f_1, \dots$  dokážeme uspokojivo opísať výchylky vibrujúceho telesa v nami vybranom mieste. Na obr.4 v strede je ukázaný príklad skladania dvoch tlmených kmitov.

Vidieť, že netlmené a aj tlmené signály výchylky v čase sú dosť komplikované. Na druhej strane, im zodpovedajúce vibračné spektrá, zobrazené na obr.4 vpravo, opisujú toto skladanie celkom jednoducho, čo poukazuje na užitočnosť zobrazovania signálov pomocou ich vibračného spektra.

Pre účely vibračnej diagnostiky v priemyselnej praxi sa vibračné spektrá rôznych zariadení pravidelne sledujú a vyhodnocujú, pričom samotné spektrum sa zo signálov získava digitálnym osciloskopom.

**Rezonancia** K rezonancii dochádza, ak na teleso pôsobíme časovo-premennou silou takou, že jej frekvencia je blízka frekvencii jedného z módov telesa. V tomto prípade bude teleso vibrovať s najväčšími výchylkami. Ak bude frekvencia sily iná, budú vibrácie menšie.

V prípade impulzného kladivka ako zdroja vibrácií využívame rezonanciu nasledovne: úder kladivkom je krátky silný signál, ktorý obsahuje veľmi veľa rôznych frekvencií s približne podobnými amplitúdami. Spomedzi týchto budú vo vibračnom spektre zastúpené s najväčšími amplitúdami tie frekvencie, ktoré sú blízke frekvenciám módov telesa. Z tohto pohľadu sa frekvencie vibračných módov telies často nazývajú aj *rezonančnými frekvenciami*.

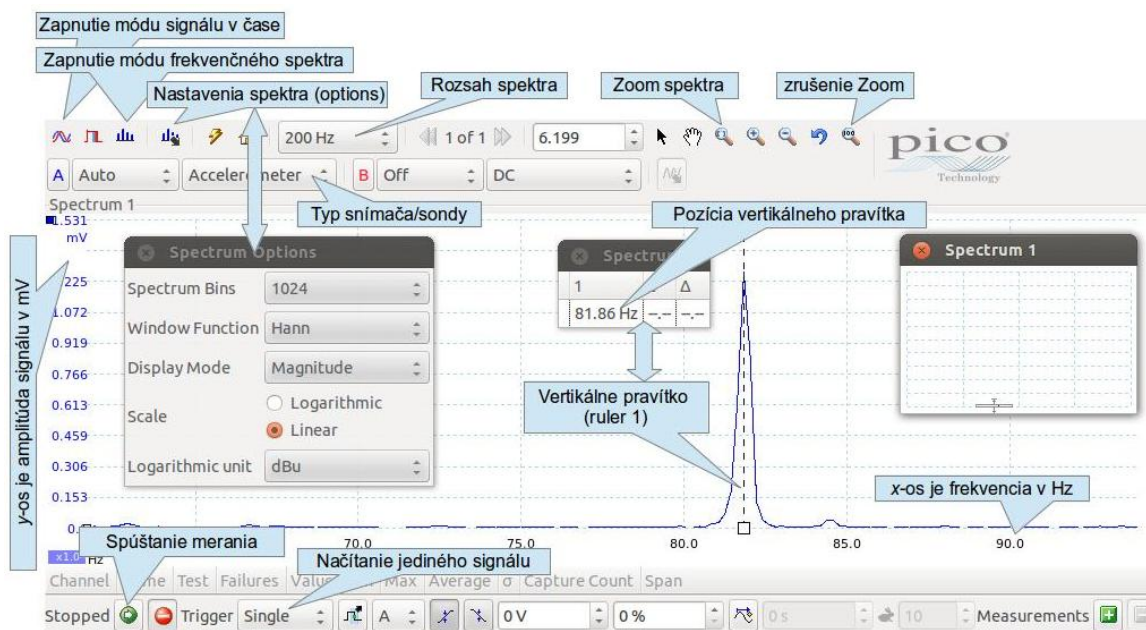
## Metóda merania



Obr. 5: Počítač s USB osciloskopom a vibračná skrinka. Bočný pohľad na zostavu, na zadnej strane rezonančnej dosky vidieť uchytenú vibračnú sondu.

**Aparatúra** Meranie budeme realizovať na vibračnej skrinke (obr. 5), skladajúcej sa zo stojanu pre úchyt jedného až troch vibračných oceľových pásikov a rezonančnej dosky. Pásiky dlhé asi 15 cm a hrubé 1,5 mm predstavujú pružné nosníky diskutované v úvode. Vibrácie budeme vybudzovať jemným úderom impulzného kladivka priamo na študovaný





Obr. 6: Okno programu Picoscope vo frekvenčnom móde s popisom niektorých prepínačov.

nosník. Následne budú snímané piezoelektrickým snímačom, magneticky uchyteným na zadnej strane rezonančnej dosky. Používaný snímač má citlivosť merania zrýchlenia  $10,2 \text{ mV}/(\text{m}/\text{s}^2)$  s rozlíšením  $3434 \text{ } \mu\text{m}/\text{s}^2$ . Signál zo snímača je vedený do digitálneho USB osciloskopu Picoscope 4224 (20MHz,  $2 \times 12$  bitový vstup), ktorý je ovládaný programom Picoscope na počítači.

## Postup práce

### Meranie frekvencie a identifikácia základného módu

- A.1 Na vibračnú skrinku uchyťme jeden nosník tak, aby jeho voľná dĺžka bola  $l = 12 \text{ cm}$ .
- A.2 Na zadnú stenu rezonančnej dosky opatrne priložíme senzor vibrácií. Prikladáme ho hranou, aby silný magnet nespôsobil prudké prirazenie senzora a jeho priveľké zrýchlenie.
- A.3 Skontrolujeme prepojenia medzi senzorom, USB osciloskopom a počítačom.
- A.4 Na počítači spustíme program Picoscope.
- A.5 V programe osciloskopu (Picoscope, vid' Obr. 6) máme nastavený typ sondy na Accelerometer ("Coupling IEPE" pre Picoscope pod MS Windows), zapneme mód vibračného spektra s rozsahom 200 Hz, nastavenia snímania spektra sú: vzorkovanie na 1024 binov, lineárne zobrazovanie amplitúdy (y-ová os). Spúšťanie (Trigger) nastavíme na jedno meranie (single) a nakoniec uvedieme osciloskop do režimu čakania na signál tlačidlom spúšťania merania (ľavý dolný roh okna).
- A.6 Kladivkom jemne udrieme na nosník a po zhruba 2-4 sekundách sa načíta spektrum. Je potrebné použiť nástroj priblíženia (zoom, myšou vyznačím obdĺžnik v spektre, ktorý chceme zväčšiť) nakoľko typické amplitúdy kmitov napätia sú v oblasti rádovo 1mV. Iden-

tifikujeme základný mód nosníka ako ostré maximum vibračného spektra v okolí  $f \sim 80\text{Hz}$ .

**A.7** Frekvenciu môžeme odčítať presunom vertikálneho meradla (ruler) myšou na pozíciu maxima získaného spektra.

**A.8** Meranie frekvencie zopakujeme pre niekoľko rôznych dĺžok vysunutia nosníka  $l$ , hodnoty zapíšeme do tabuľky a vynesieme do grafu závislosť  $f(1/l^2)$ , čím overíme platnosť vzťahu (1) a zároveň sa presvedčíme, že pozorovaná frekvencia naozaj zodpovedá kmitom nášho nosníka.

Poznámky:

- Zväčšením frekvenčného rozsahu na niekoľko kilohertzov a načítaním spektra nanovo sa môžeme presvedčiť, že vibračná skrinka vykazuje väčší počet rezonancií pri vyšších frekvenciách.
- Ak zapneme program do módu signálu v čase s parametrami: časovým rozlíšením 200ms/div, spúšťačom (Trigger) na single, s nastavením predčítania Pre-trigger na 10% a hladinou spúšťača na 10 mV, môžeme pozorovať charakter tlmených kmitov signálu, podobný superpozícii tlmených kmitov zobrazenej na Obr. 4 v strede dole.
- (len pre program Picoscope pustený pod MS Windows) Pre presné meranie frekvencie v oblasti maxima použijeme funkciu “Add measurement/Frequency at Peak/Peak nearest ruler 1”, spúšťač (Trigger) nastavíme na viacero meraní (Repeat), pričom frekvenciu určujeme z niekoľkonásobného opakovania úderu kladivkom; program pritom počíta strednú hodnotu frekvencie maxima pozorovaného spektra, zobrazenú v riadku na spodnom okraji okna.
- Získané spektrum je možné uložiť ako tabuľku alebo obrázok prostredníctvom menu File -> Save As.

## Vplyv prídavnej hmotnosti

**B.1** Na vibračnej skrinke máme uchytený jeden nosník, na ktorého voľný koniec uchytime svorku bez akejkoľvek záťaže.

**B.2** Postupom daným bodmi **A.5** až **A.7** nájdeme frekvenciu nosníka so svorkou,  $f_0$ .

**B.3** Meranie opakujeme s navyšovaním záťaže na  $m_1, 2m_1$  a  $3m_1$  a nameriame k tomu zodpovedajúce frekvencie  $f_1, f_2$  a  $f_3$ .

**B.4** Nájdeme tvar lineárnej závislosti frekvenčného posunu  $\Delta f = f_i - f_0$  od hmotnosti  $m_i$ .

**B.5** Pomocou nájdenej závislosti určíme hmotnosť vybraného predmetu, ktorý dokážeme uchytiť svorkou na nosník.

## Kmitanie spojených nosníkov

1.) Na vibračnú skrinku uchytime dva alebo tri nosníky rovnakej dĺžky.



- 2.) Odmeriame zmenu frekvencie v dôsledku väzby prostredníctvom základne vibračnej skrinky.
- 3.) Voľné konce nosníkov prepojíme pomocou svoriek a tenkého plechu.
- 4.) Odmeriame vibračné spektrum pri väzbe prostredníctvom tenkého plechu.

**PodĎakovanie** Potrebné experimentálne zariadenia k tejto úlohe boli zakúpené z prostriedkov poskytnutých Nadáciou Volkswagen, za čo jej výkonný výbor Fyzikálno-technickej akadémie ďakuje. Zvlášť ďakujeme pani Alexandre Pappovej za jej ochotu a pomoc pri príprave tohto projektu.

Meno:

Krúžok:

Dátum merania:

## Protokol laboratórnej úlohy č. 101

# Vibrometria

**Stručný opis metódy merania**

**Vzťahy, ktoré sa používajú pri meraní**

**Prístroje a pomôcky**

## Záznam merania, výpočty a výsledky

### Závislosť frekvencie základného módu od dĺžky nosníka

Parametre nosníka:

$$E = \quad , \rho = \quad , h = \quad .$$

Tabuľka 1:

$l$ [cm]				
$1/l^2$ [cm <sup>-2</sup> ]				
$f$ [Hz]				

Z grafu:

$$f(1/l^2) = c_g \frac{1}{l^2}, \quad c_g =$$

Teoreticky:

$$c_t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho}} \beta_1^2 =$$

### Závislosť frekvencie základného módu od pridanej hmotnosti

Tabuľka 2:

$m$ [g]			
$f$ [Hz]			
$\Delta f$ [Hz]			

Závislosť frekvenčného posunu na hmotnosti:

$$\Delta f(m) = pm + q, \quad q = \quad , \quad p = \quad .$$

Určenie hmotnosti zvoleného telieska z frekvencie:

$$f_x = \quad , \quad \Delta f_x = \quad , \quad m_x = \quad .$$

Vážení:

$$m'_x =$$

## Štúdium posunu rezonančných frekvencií spojených nosníkov

Zhodnotenie výsledkov

Dátum odovzdania protokolu:

Podpis študenta:

Hodnotenie a podpis učiteľa: